

$a_1$   $a_2$   $a_3$   $a_4$  итого  
 7 7 X 4 18

М921В

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

9.1. В слове МАТЕМАТИКА замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наименьшее возможное десятизначное число, кратное 90. Ответ объясните.

9.2. Докажите, что из 2019 полосок бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, ..., 2019 можно составить прямоугольник, ширина и длина которого больше 1. (Использовать все полоски обязательно. Накладывать полоски друг на друга нельзя.)

9.3. Квадрат расстояния между корнями квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$  равен 1. Найдите коэффициенты  $p$  и  $q$ , если известно, что они являются простыми числами.

9.4. Дан треугольник  $ABC$ . Через точку  $A$  проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла  $ABC$  и пересекающая прямую  $CB$  в точке  $K$ . Через точку  $C$  также проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла  $ABC$  и пересекающая прямую  $BA$  в точке  $M$ . Найдите  $AB$ , если  $BM = 9$ ,  $KC = 2$ .

11

МАТЕМАТИКА : 90,  $\Rightarrow$  разложим на простые числа:

1 0 2 3 1 0 2 4 5 0

$90 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$   
 $= 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$

т.к. : 10  $\Rightarrow$  последние 2 цифры 0

- 1) (9)
- 2)  $M \neq 0$ , т.к. 1 цифра не может быть = 0

3) Начиная с "М"

цифры  $\downarrow$ , ко

"М"  $\neq 0, \Rightarrow M = 1$

T = 2

e = 3

u = 4

k = 5

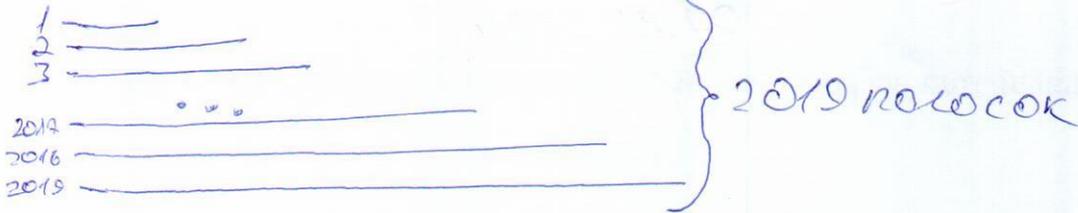
4) Проверим сумму цифр на : 9

$$\begin{aligned}
 2M + 3A + 2T + e + u + k &= \\
 = 2 + 0 + 4 + 3 + 4 + 5 &= \\
 = (6+3) + (4+5) = 9 + 9 = 18 : 9 = 1
 \end{aligned}$$

ответ: 1023102450

т.к. наименьшее возможное значение

(N2)



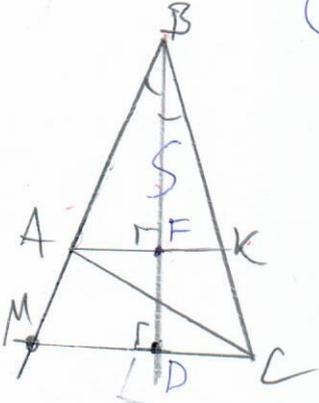
Формула от АЛН выводится от принципа  $\sum$ -многоугольн. <sup>сумма</sup>  
 $1+2+3+4+5 = 6+6+3 = 15$  или  $1+2+3+4 = 10$

$\Rightarrow 1+2+3+\dots+2017+2018+2019$ , в итоге у нас получается переопределенная сумма которой 2019, следовательно  $1+2+\dots+2017+2018$  (кусочков) не потому что в конце просто добавим поперечную полосу суммируем величину



все ряды кроме последней состоят из 2 кусочков  $\sum$  которых: 2019 + последний сам по себе 2019

Ответ:  $AB=7$



(N4)

Доказано:  
 ABC - треугольник  $AM=9; KC=2$   
 BL - биссектриса  $\angle ABC$   
 $AF \perp BD$  при  $AF \cap BC$  в  $(\circ) K$   
 $CD \perp BD$  при  $DC \cap AB$  в точке M

Найти: AB

при  $\angle KMB = \angle BC$   
 $(\text{суд}) \Rightarrow AB = BK$ , но  
 $AB = BK = BC - KC =$   
 $= MB - AM$ , но  
 $AM = KC$   $(MB - AB = AC - BK)$   
 $\Rightarrow AB = \frac{BM - KC}{2} = \frac{9 - 2}{2} = 7$

Решение:

1) Рассмотрим  $\Delta$ -шки ABF и BFK:

- BF - общ
- $\angle BFA = \angle BFK$ , так  $\angle AFB = \angle BFK = 90^\circ$  ( $AK \perp BD$ )
- $\angle ABF = \angle FBK$  (BF - биссектриса)

они = по 2-м и стороне

2) Рассмотрим  $\Delta$ -шки MBD и BDC:

- BD - общ
- $\angle BDM = \angle BDC$  ( $MC \perp BD$ )

$\angle MBD = \angle BDC$  (BD - бисс.)

М9385

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

л1 7 л2 7 л3 x л4 4 Итого 18

9 класс

9.1. В слове МАТЕМАТИКА замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наименьшее возможное десятизначное число, кратное 90. Ответ объясните.

9.2. Докажите, что из 2019 полосок бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, ..., 2019 можно составить прямоугольник, ширина и длина которого больше 1. (Использовать все полоски обязательно. Накладывать полоски друг на друга нельзя.)

9.3. Квадрат расстояния между корнями квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$  равен 1. Найдите коэффициенты  $p$  и  $q$ , если известно, что они являются простыми числами.

9.4. Дан треугольник ABC. Через точку A проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла ABC и пересекающая прямую CB в точке K. Через точку C также проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла ABC и пересекающая прямую BA в точке M. Найдите AB, если  $BM = 9$ ,  $KC = 2$ .

л1.

МАТЕМАТИКА : 90 M, A, T, E, U, K - числа M ≠ A ≠ T ≠ E ≠ U ≠ K  
Найдем мин. число МАТЕМАТИКА : 90

1) т.к. чтобы число делилось на 90 нужно, чтобы оно делилось на 9 и на 10 ⇒ после нуля цифра 0  
и сумма цифр : 9 ⇒ A = 0 и  $2M + 2T + 3A + U + K + E : 9 ⇒ 2M + 2T + U + K + E : 9$

2) Предположим, что  $2M + 2T + U + K + E = 9$  и  $M = 1 ⇒ 2 + 2T + 3A + U + K + E = 9 ⇒ 2T + U + K + E = 7 ⇒ T = 2 ⇒$   
Эти предположения вполне осуществимы над 0, чтобы первая цифра была равна 1 и так нужно для мин. числа чтобы уменьшить на 2 мин. цифра

⇒  $4 + U + K + E = 9 ⇒ U + K + E = 5 ⇒$  предположим, что неверное т.к.  $U + K + E$  должно = 3 а  $U ≠ K ≠ E$

3) Предположим, что  $2M + 2T + 3A + U + K + E = 18$  и  $M = 1 ⇒ 2 + 2T + 3A + U + K + E = 18 ⇒ 2T + U + K + E = 16 ⇒$   
⇒  $T = 2 ⇒ U + K + E + 4 = 16 ⇒ U + K + E = 12 ⇒ U = 3 ⇒ 3 + K + E = 12 ⇒ K + E = 9 ⇒ K = 4$  и  $E = 5$  т.к.  $K ≠ E$  и чтобы  
была минимальная разница между цифрами

4) Из 1) и 2) и 3) выходит идеальный вариант - 1023102450 т.к. чтобы получить минимальное число  
МАТЕМАТИКА  
вариант комбинации чисел нужно, чтобы большее число стояло в меньшей разряде и потому  
нам не важно какие значения присваивать E, U и K

2.

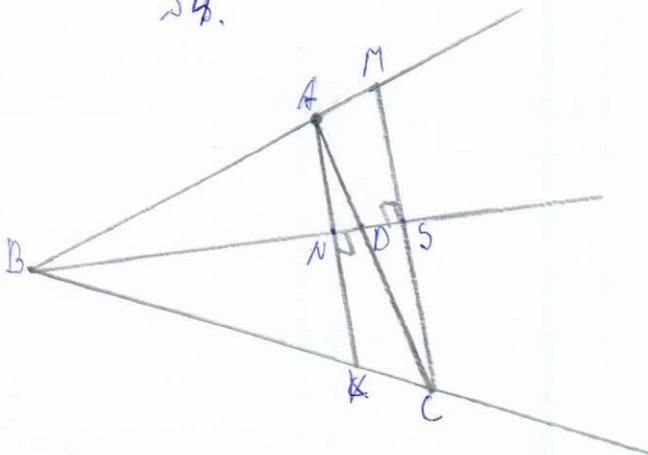
1) м.к. по-во разрезания густ - трианглов и квадратных густо сет у носок  $\Rightarrow$  можно составить

$$\frac{(2019-1)}{2} = 1009 \text{ пар по густам, соединив носок и машин образом - } \begin{array}{c} \square \\ | \\ \square \\ | \\ 1 \end{array}$$

а т.к. сумма густ двух пар равна, если складываем их машин образам:  $1+2018, 2+2017 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  если соединить пары носками рядом и рядом еще носок густов 2019  $\Rightarrow$  получится  
 прямоугольник со сторонами:

$$2019 (1+2018 \text{ или } 2+2017 \text{ или } \dots) \text{ и } 1010 \text{ (м.к. } 1009 \text{ пар и носок)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  в конце получится прямоугольник у которого сторона больше 1 м.г.  $(2019 \text{ и } 1010)$   
 2.4.



Дано:  
 $\triangle ABC$   
 BD - биссектриса  
 $AK \perp BD$   
 $CM \perp BD$   
 $BM = 9$   
 $KC = 2$   
 Найти:  
 AB

Решение:

1)  $\angle AK \cap BD = N$  и  $\angle MC \cap BD = S \Rightarrow$

2) Рассмотрим  $\triangle BMS$  и  $\triangle BSC$ :

м.к. BS - биссектриса  $\Rightarrow \angle MBS = \angle SBC$   
 м.к.  $BS \perp MC \Rightarrow \angle BSM = \angle BSC$   
 и BS - общая  $\Rightarrow \triangle BMS = \triangle BSC \Rightarrow BM = BC$  (как соответствующие элементы)

3) Рассмотрим  $\triangle BAN$  и  $\triangle BCK$ :

м.к. BN - биссектриса  $\Rightarrow \angle ABN = \angle NBK$   
 м.к.  $AK \perp BN \Rightarrow \angle ANB = \angle BCK$   
 и BN - общая  $\Rightarrow \triangle BAN = \triangle BCK$

4) м.к.  $BM = BC = 9$  и  $BA = BK$  и  $BM = BA + AM$  и  $BC = BK + KC$  и  $KC = 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AB = BC - KC = 9 - 2 = 7$

Ответ:  $AB = 7$

№1 №2 №3 №4 Итого  
7 7 X 4 18

9 класс

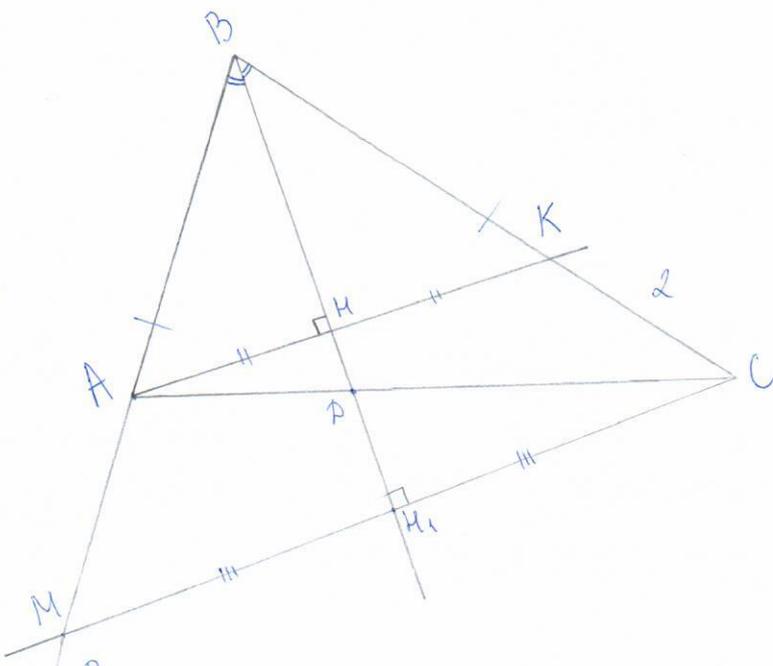
9.1. В слове МАТЕМАТИКА замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наименьшее возможное десятизначное число, кратное 90. Ответ объясните.

9.2. Докажите, что из 2019 полосок бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, ..., 2019 можно составить прямоугольник, ширина и длина которого больше 1. (Использовать все полоски обязательно. Накладывать полоски друг на друга нельзя.)

9.3. Квадрат расстояния между корнями квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$  равен 1. Найдите коэффициенты  $p$  и  $q$ , если известно, что они являются простыми числами.

9.4. Дан треугольник  $ABC$ . Через точку  $A$  проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла  $ABC$  и пересекающая прямую  $CB$  в точке  $K$ . Через точку  $C$  также проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла  $ABC$  и пересекающая прямую  $BA$  в точке  $M$ . Найдите  $AB$ , если  $BM = 9$ ,  $KC = 2$ .

ω 9.4.



Дано:  $\triangle ABC$  - треугольник.

~~BD~~  $BD$  - биссектриса  $\angle ABC$

$AK \perp BD$

$AK \cap BC = K$

$CM_1 \perp BD$

$CM_1 \cap BA = M$

$BM = 9$

$KC = 2$ .

Найти:  $AB$

Решение:

Рассмотрим  $\triangle AKC$ :

Т.к. прямые  $AK \perp BD$  (по усл),  $\Rightarrow AK \perp BM$  (т.к.  $BM$  лежит на прямой  $BD$ ),  $\Rightarrow BM$  - высота.

Т.к.  $BD$  - биссектриса  $\angle ABC$  (по усл),  $\Rightarrow$  а  $BM$  лежит на прямой  $BD$ ,  $\Rightarrow BM$  - биссектриса  $\angle ABC$

$\Rightarrow BM$  - медиана  
 $\Rightarrow \triangle AKC$  - р/д  
(по признаку р/д  $\triangle$ )

Рассмотрим  $\triangle ABC$ :

Т.к.  $BM_1 \perp BC$  (по усл),  $\Rightarrow BM_1$  - высота (т.к.  $BM_1$  лежит на прямой  $BD$ ).

Т.к.  $BD$  - биссектриса  $\angle ABC$  (по усл),  $\Rightarrow BM_1$  - биссектриса  $\angle ABC$  (т.к.  $BM_1$  лежит на прямой  $BD$ ).

$\Rightarrow BM_1$  - медиана,  $\triangle ABC$  - р/б (по признаку р/б  $\triangle$ ),  $\Rightarrow BM = BC$ .

Т.к.  $\triangle ABK$  - р/б (вошн),  $\Rightarrow AB = BK$  (боковые стороны р/б  $\triangle$ ),  $\Rightarrow$  т.к.  $BM = BC$  (вошн),  $\Rightarrow$

$\Rightarrow BM - AB = BC - BK$ , т.е.  $AM = KC$ ,  $\Rightarrow AM = 2$ , т.к.  $KC = 2$  (по усл).

Т.к.  $AM = 2$  (вошн),  $BM = 9$  (по усл),  $\Rightarrow BM = AB + AM$

$$AB = BM - AM$$

$$AB = 9 - 2 = 7.$$

Ответ:  $AB = 7$ .

9.1

# МАТЕМАТИКА

Т.к. число : 90,  $\Rightarrow$  это число : 10  
и : 9 } т.к.  $90 = 9 \cdot 10$ . Т.к. это число : 10,  $\Rightarrow$  оно должно

оканчиваться на 0,  $\Rightarrow A = 0$ . Т.к. это число : 9,  $\Rightarrow$  сумма цифр : 9,  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (M + A + T + E + M + A + T + U + K + A) : 9, \Rightarrow (2 \cdot M + 3 \cdot A + 2 \cdot T + E + U + K) : 9, \Rightarrow (2M + 2T + E + U + K) : 9, \text{ т.к.}$$

$A = 0$ . Т.к.  $M \cdot 2$  и  $T \cdot 2$ ,  $\Rightarrow$  приведем их к наименьшим цифрам 1 и 2 (0 нельзя, т.к.  $A = 0$ ), т.к.

$$\text{нам нужно ввести наименьшее число,} \Rightarrow (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + E + U + K) : 9.$$

Т.к. нужно ввести наименьшее число,  $\Rightarrow$  приведем  $E, U, K$  к наименьшему разряду

$$\text{наименьшую цифру,} \Rightarrow E = 3, U = 4, K = 5, \Rightarrow (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 + 4 + 5) : 9$$

$$18 : 9 \text{ (верно),} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{МАТЕМАТИКА} \\ 1023102450 \Rightarrow \text{число } 1023102450.$$

Ответ: число 1023102450.

9.2

Чтобы составить прямоугольник из таких палочек, нужно "укладывать" эти палочки так, чтобы в ширину у них были одинаковые числа. Самая большая по длине палочка = 2019,  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  ведущая будет = 2018 + 1 (мы можем так делать, потому что все палочки одинаковой ширины = 1).

$2019 \div 2$ , но самые наибольшие числа (палочки), которые в ширине дадут 2019, это числа 1009 и 1010.

Это будет выглядеть вот так:

|      |      |
|------|------|
| 2019 |      |
| 2018 | 1    |
| 2017 | 2    |
| 1010 | 1009 |

Далее палочки заканчиваются.

Ширина прямоугольника и длина прямоугольника будут больше 1, т.к.

одна сторона прямоугольника = 2019, а другая = 1 + 1 + ... + 1 (т.к. у всех палочек ширина = 1),  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  из 2019 палочек шириной 1 и длинами 1, 2, 3, ..., 2019 можно составить прямоугольник, ширина и длина которого больше 1. Ч.т.д.